

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA PE ȘCOALĂ, 13.02.2026
CLASA a VI – a

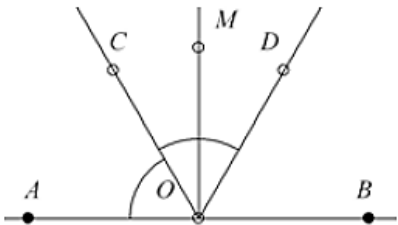
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 22,5 puncte. Se acordă 10 puncte din oficiu.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Problema 1 (autor ***)

Fie punctele coliniare A, O, B (în această ordine) și semidreptele OC, OD în același semiplan, iar punctul C este situat în interiorul unghiului AOD . $\sphericalangle AOC = x^\circ$, $\sphericalangle COD = y^\circ$ și $\sphericalangle DOB = z^\circ$, unde $x, y, z \in \mathbb{N}^*$. Știind că (x, y, z) sunt direct proporționale cu $(y + z, z + x, x + y)$,

- Arătați că $x = y = z$.
- Demonstrați că semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOD .
- Demonstrați că bisectoarea unghiului COD este perpendiculară pe dreapta AB .

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>a) Din $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = \frac{x+y+z}{2 \cdot (x+y+z)} = \frac{1}{2}$ obținem $2x = y+z, 2y = z+x$ și $2z = x+y$.</p>	7p
<p>Presupunem $x \leq y \leq z$, celelalte cazuri se tratează analog, cum $2z = x+y$, cum $x \leq z$ și $y \leq z$, putem avea egalitatea doar dacă $x = y = z$.</p> <p><i>Soluție alternativă:</i> scăzând primele două relații obținem $2(x-y) = y-x$, deci $x = y$, de unde $x = y = z$.</p> <p><i>Soluție alternativă:</i> $x + y + z = 180^\circ$, deci $3x = 180^\circ \Leftrightarrow x = 60^\circ$, analog $y = 60^\circ, z = 60^\circ$.</p>	5,5p
 <p>b) Cum $\sphericalangle AOC = \sphericalangle COD = \sphericalangle DOB = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, deducem că OC este bisectoarea unghiului AOD.</p>	5p

c) Fie OM bisectoarea unghiului COD , avem $\angle COM = 30^\circ$, deci $\angle AOM = \angle AOC + \angle COM = 90^\circ$, în concluzie $OM \perp AB$.	5p
--	-----------

Problema 2 (autor Sever Pop, Baia Mare, G.M 9)

Determinați numerele naturale n și x care verifică relația $10^n + 189 = x^2$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Pentru $n = 0$ și $n = 1$ nu avem soluții, iar pentru $n = 2$ obținem $x = 17$.	7p
Presupunem că $n \geq 3$, atunci $10^n : 8$, iar 189 este de forma $M_8 + 5$, deci membrul stâng este de forma $M_8 + 5$	6,5p
Cum, pentru $n \in \mathbb{N}^*$, x trebuie să fie număr impar, deducem că x^2 este de forma $M_8 + 1$	6p
Deducem că pentru $n \geq 3$ nu avem soluții, deci singura soluție este $n = 2$ și $x = 17$.	3p

Problema 3 (autor ***)

Fie numerele naturale nenule a și b , astfel încât $[a^2, b] + [a, b^2] = (5a + 12b) \cdot (a, b)$.

Arătați că 7 divide $(a + b)$.

(Am notat cu (x, y) cel mai mare divizor comun al numerelor naturale x și y și cu $[x, y]$ cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y)

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din cauza unei erori în enunț, la această problemă se acordă punctajul maxim.	22,5p

Problema 4 (autor ***)

a) Câte submulțimi nevide are o mulțime cu 10 elemente ?

b) Demonstrați că din orice mulțime de zece numere naturale distincte de două cifre (scrise în baza zece), se pot alege două submulțimi disjuncte ale căror elemente au aceeași sumă.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Există $2^{10} - 1$ submulțimi nevide ale unui mulțimi cu 10 elemente	6,5p
b) Există $2^{10} - 2 = 1022$ submulțimi distincte (nevide și care nu includ întreaga mulțime) ale mulțimii de 10 numere de două cifre.	3p
Suma elementelor oricărei submulțimi trebuie să fie cuprinsă între 10 și $90 + 91 + 92 + \dots + 99 < 10 \cdot 100 = 1000$. Deci numărul sumelor distincte este mai mic decât 1000.	5p
Deoarece $1000 < 1022$, din principiul cutiei obținem că există două submulțimi distincte ale căror elemente au aceeași sumă.	5p
Fie aceste mulțimi A și B și fie $A' = A \setminus (A \cap B)$ și $B' = B \setminus (A \cap B)$, atunci submulțimile A' și B' verifică proprietățile din enunț.	3p

